回路システム学第二（3）

2019.4.22

担当教員　山尾　泰

ラプラス変換による回路方程式の解法

例題1.（ラプラス変換による過渡・定常応答解析）

図1の回路において，回路は零状態（初期条件がすべて0）であるとする.

$e(t) = \sin \omega t\ [V]$,

$R = 1[\Omega]$,

$C = 0.5[F]$,

$L = 1[H]$,

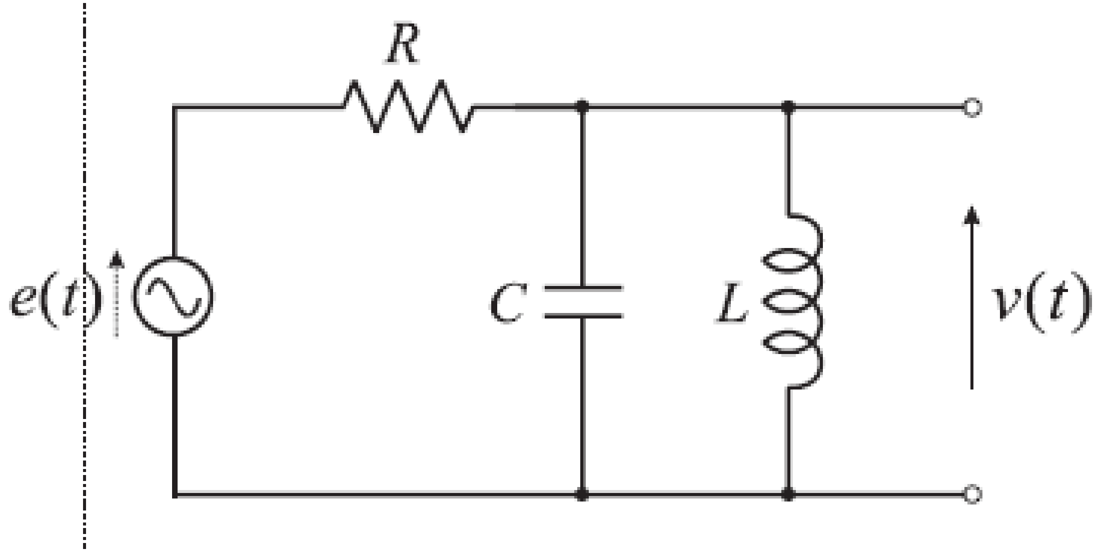
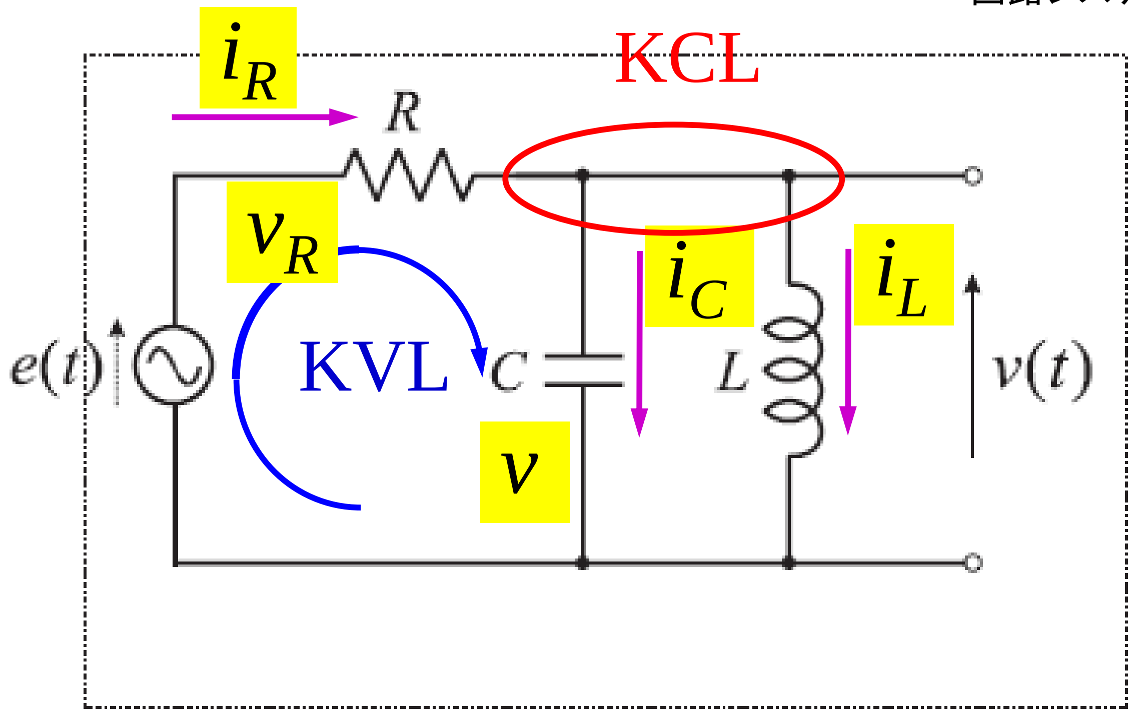


図1

（問題1）時刻 $t \geqq 0$ において、端子電圧 $v(t)$ に成り立つ

回路方程式を立てよ. (第1回の問題で $A=1$)



KCL $-i_R(t)+i_C(t)+i_L(t)=0$

KVL $-e(t)+v_R(t)+v(t)=0$

$$\Rightarrow \quad v(t)=e(t)-v_R(t)$$

$$v_R(t)=i_R(t)R=(i_C(t)+i_L(t))R=(C\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}v(t)dt)R$$

（続き）

$$\Rightarrow \quad v(t) = e(t) - \left(C\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(t)dt\right)R$$

微分と積分が混在しているので、両式を微分して(t)を省略すると

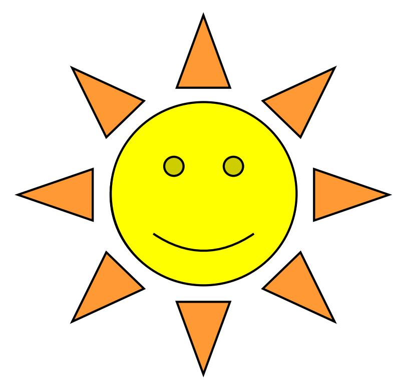
$$\frac{dv}{dt} = \frac{de}{dt} - RC\frac{d^2v}{dt^2} - \frac{R}{L}v$$

これで変数は v のみとなったので、素子定数 R, C, L と電圧源関数 e を入れると

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d(\sin\omega t)}{dt} - 0.5\frac{d^2v}{dt^2} - v$$

これを微分次数順に整理すると

$$\boxed{\frac{d^2v}{dt^2} + 2\frac{dv}{dt} + 2v = 2\omega\cos\omega t}$$



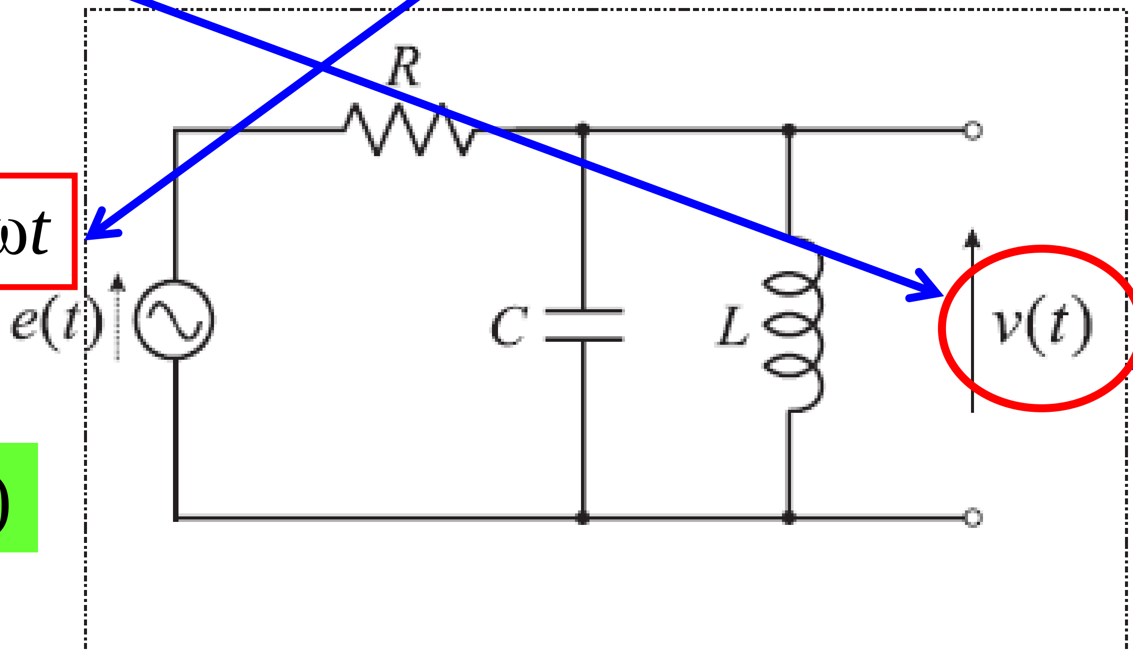
正　解

回路方程式の意味するところは？

$$\frac{d^2v}{dt^2}+2\frac{dv}{dt}+2v=2\omega\cos\omega t$$

$e(t)$ と v の関係

$e(t)=\sin\omega t$



入力；$x(t)$

応答；$y(t)$

（例題2）上式より $v(t)$ のラプラス変換 $V(s)$ を求めよ。

ラプラス変換とは？

ある時間関数 $x(t)$ を複素周波数の関数 $X(s)$ に変換する操作

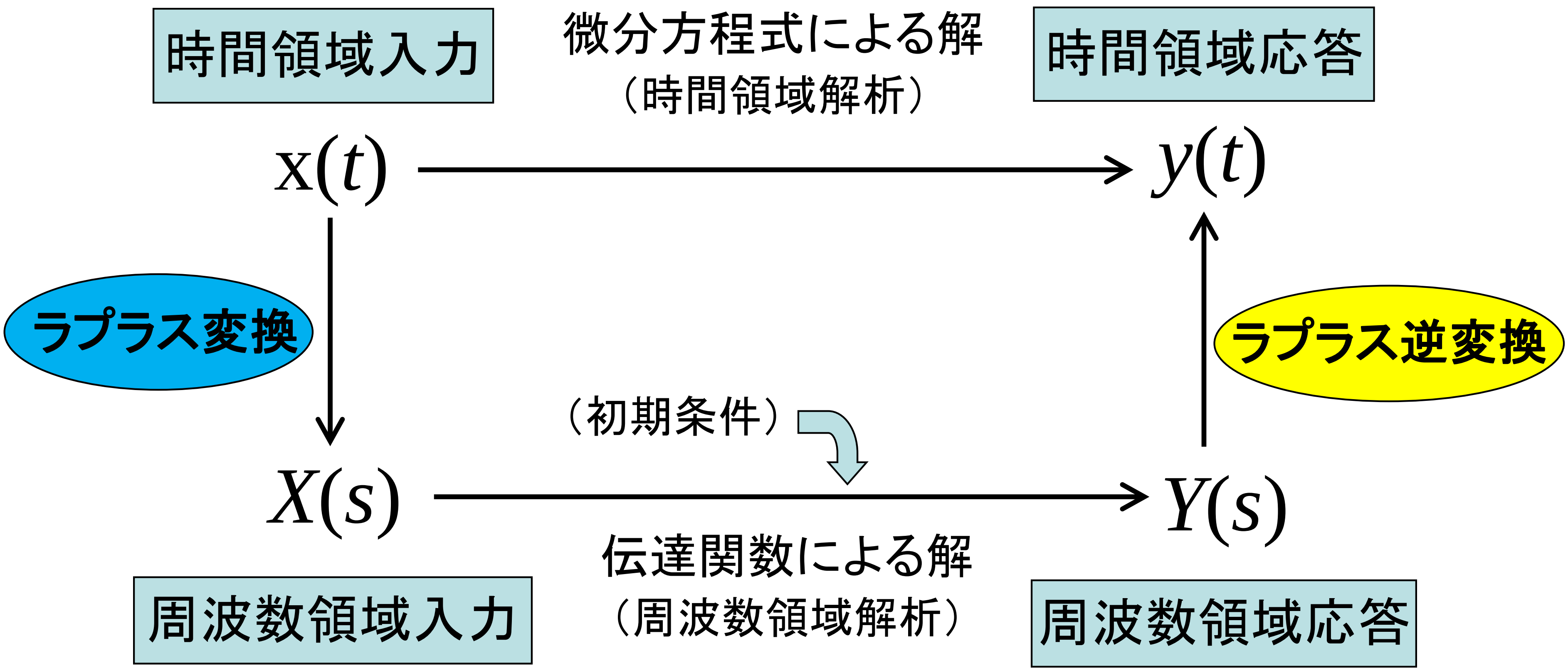
時間波形（関数） → 複素周波数スペクトル（関数）

$x(t)$ → $X(s)$ $\quad s=\sigma+j\omega$

＜目的＞:任意波形に対する回路の応答の解析

- 回路のインパルス応答関数（**伝達関数**）から、回路網の応答を逆ラプラス変換で求められる
  → 回路の微分方程式を解くのに比べ、解析が容易な場合が多い
- 従属接続された回路ブロックの総合伝達関数は、各ブロックの伝達関数の積で表される
  → 所望の特性を得るための回路設計が容易になる

任意波形入力に対する回路の応答の解析方法



微分方程式からラプラス変換を求める

今の問題に当てはめると

時間領域入力

微分方程式による解
（時間領域解析）

時間領域応答

$e(t) = \sin\omega t$ → $v(t)$

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2\frac{dv}{dt} + 2v = 2\omega\cos\omega t$$

ラプラス変換

ラプラス逆変換

$H(s)$

$E(s)$ → $V(s)$

周波数領域入力

伝達関数による解
（周波数領域解析）

周波数領域応答

微分方程式をよく見てみよう

$$\frac{d^2v}{dt^2}+2\frac{dv}{dt}+2v=2\omega\cos\omega t$$

出力応答vに関する式　　入力 $e(t)$ = $\sin\omega t$ に関する式

このまま両辺をラプラス変換してみよう

出力のラプラス変換 $V(s)$ に関する式 ＝ 入力のラプラス変換 $E(s)$ に関する式

になるはずである

左辺(微分項)のラプラス変換

$f(t)$ のラプラス変換を $\mathcal{L}\left[f(t)\right]=F(s)$ とすると

微分のラプラス変換の公式

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right]=s^n F(s)\cancel{-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}\left(\frac{df(t)}{dt}\right)_{t=0}-\cdots-\left(\frac{d^{n-1}f(t)}{dt^{n-1}}\right)_{t=0}}$$

回路初期条件がすべて0 ($t\leq 0$)なら、右辺の第2項以降は0となる。

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2v(t)}{dt^2}\right]=s^2V(s) \qquad \mathcal{L}\left[\frac{dv(t)}{dt}\right]=sV(s) \qquad \mathcal{L}\left(v(t)\right)=V(s)$$

したがって

左辺＝ $s^2V(s)+2sV(s)+2V(s)$

右辺(入力)のラプラス変換

三角関数のラプラス変換の公式

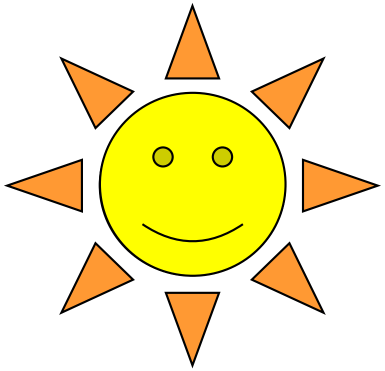
$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}, \quad \mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

右式を用いると、微分方程式のラプラス変換は

$$s^2V(s) + 2sV(s) + 2V(s) = 2\omega\left(\frac{s}{s^2+\omega^2}\right)$$

以上から $V(s)$ は

$$V(s) = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)(s^2+2s+2)}$$



正 解

（例題3） (例題2) で求めたラプラス変換 $V(s)$ の逆ラプラス変換により $v(t)$（時間領域応答）を求めよ. ただし $\omega = \sqrt{2}$ $[rad/s]$ とする.

$$\mathcal{L}^{-1}[V(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\underbrace{\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)(s^2+2s+2)}}_{\text{＜有理関数＞}}\right]$$

$$\downarrow$$

$$v(t) = ?$$

有理関数の逆ラプラス変換を行うには、

1. **部分分数展開**により、ラプラス変換の公式リストに存在する関数の和に分解する

2. 各係数は**係数比較**または**留数定理**を用いて求める

$\omega = \sqrt{2}$ の条件下では

$$V(s) = \frac{2\sqrt{2}s}{(s^2 + \sqrt{2}^2)(s^2 + 2s + 2)} = \frac{\sqrt{2}}{s^2 + 2} + \frac{-\sqrt{2}}{s^2 + 2s + 2}$$

と**部分分数展開**できる。したがって

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}[V(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{2}}{s^2 + 2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-\sqrt{2}}{s^2 + 2s + 2}\right]$$

上式では、**ラプラス変換の線形性** を用いている

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \Leftrightarrow c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

右辺のそれぞれを公式表にしたがい、逆ラプラス変換をすると

（続き）

第1項: $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{\sqrt{2}}{s^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}\right]=\sin\sqrt{2}t$

第2項: $-\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{\sqrt{2}}{s^2+2s+2}\right]=-\sqrt{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s+1)^2+1^2}\right]=-\sqrt{2}\,e^{-t}\sin t$

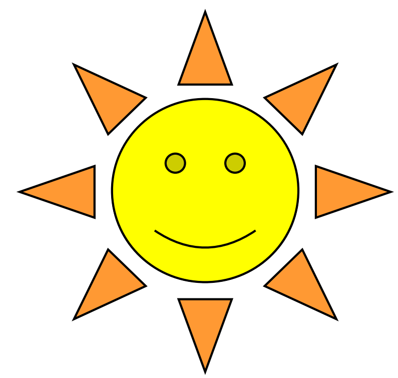
したがって

$$v(t)=\sin\sqrt{2}t-\sqrt{2}\,e^{-t}\sin t$$

入力信号が
出力されたもの

$\omega=\sqrt{2}$

過渡応答出力



正　解

-ラプラス変換の意味するもの-

ラプラス変換をより良く理解するために

ここまで、微分方程式のラプラス変換により $V(s)$ を求め、
これを逆ラプラス変換して時間領域の出力 $v(t)$ を求めた

時間領域入力

微分方程式による解
（時間領域解析）

時間領域応答

$e(t)$ - - - - → $v(t)$

$$\frac{d^2v}{d^2t}+2\frac{dv}{dt}+2v=2\omega\cos\omega t$$

ラプラス変換

ラプラス変換

ラプラス逆変換

$E(s)$ → $V(s)$

s 関数による解
（周波数領域解析）

周波数領域入力

周波数領域応答

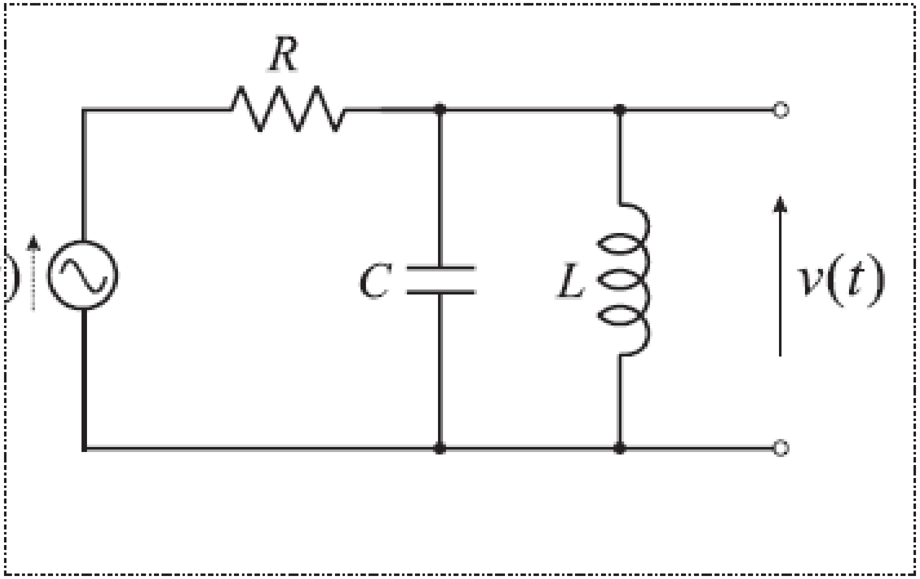
時間応答波形を求めるための道具としてラプラス変換を用いた

回路の応答波形が持つ意味

図1の回路の出力電圧 $v\,(t)$ の物理イメージをさらに考えよう

1. 入力電圧

$$e(t) = \sin\omega t \quad (t \geqq 0)$$



3. 出力電圧

2. 回路

$$R = 1[\Omega],$$
$$C = 0.5[F],$$
$$L = 1[H],$$

このときの出力 $v(t)$ は

$$v(t) = \sin\sqrt{2}t - \sqrt{2}\,e^{-t}\sin t$$ であった

上式の右辺は

（1）入力信号と同じ周波数の信号（$\omega = \sqrt{2}$ ）

（2）入力信号とは異なる固有周波数を有する減衰振動形の応答信号 （ $\omega_n = 1$）

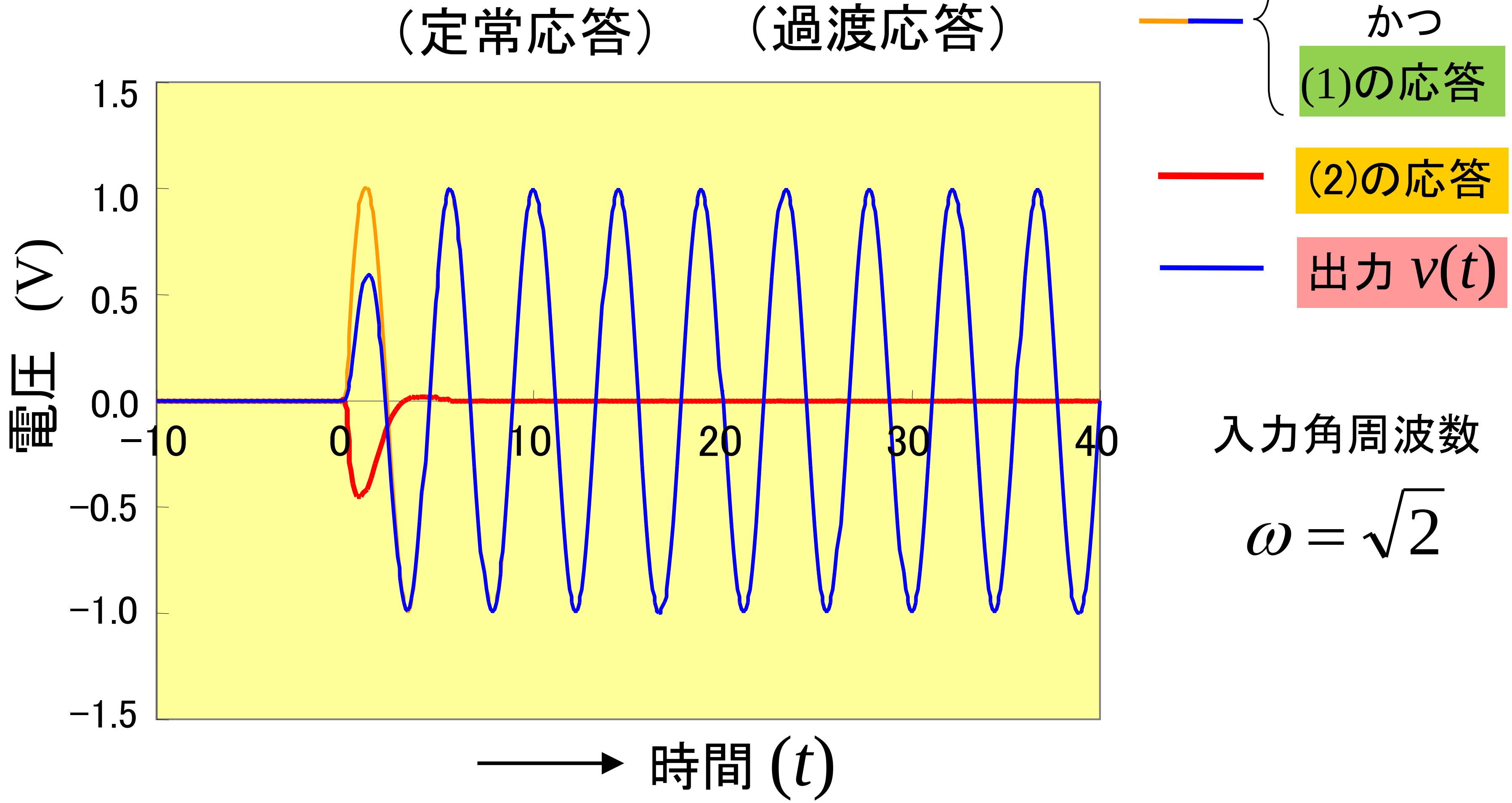
からなる

そこで実際の応答電圧波形を計算してみると

図1の回路の応答波形

$$v(t) = \sin\sqrt{2}t - \sqrt{2}\,e^{-t}\sin t$$

（定常応答）　（過渡応答）



入力角周波数

$$\omega = \sqrt{2}$$

過渡応答と定常応答

回路の2種類の応答とは？

過渡応答；過渡入力に対する回路応答

電圧や電流などの変化の様相が時間的に一定でも周期的でもなく、時間と共に変化している入力

（例）スイッチをオンにした t=0 直後の応答

定常応答；定常状態での回路応答

電圧や電流などの変化の様相が時間的に一定または周期的であり、時間と共に変化しない状態

（例）スイッチをオンにしてからかなり時間がたった後の応答

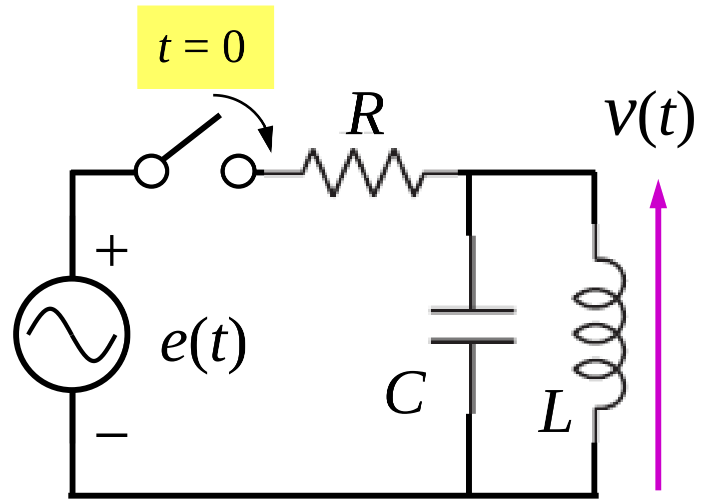


図1の回路

過渡・定常応答の解析は時間応答波形から可能

ラプラス変換のもうひとつの側面

出力 $v(t)$ が以下の2波形の和になった過程を考えよう

式 $v(t) = \sin\sqrt{2}t - \sqrt{2}\, e^{-t} \sin t$ を求めた時、

まず微分方程式を立て、これをラプラス変換し
$v(t)$ のラプラス変換 $V(s)$ を求めた

$$V(s) = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)(s^2+2s+2)}$$

これを逆ラプラス変換するため2つの因数に分解した

（続き）

$$V(s)=\frac{2\sqrt{2}s}{(s^2+\sqrt{2}^2)(s^2+2s+2)}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}}+\boxed{\frac{-\sqrt{2}}{s^2+2s+2}}$$

これらの逆ラプラス変換を求め、その和として出力 $v(t)$ を求めた

第1項: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{2}}{s^2+\sqrt{2}^2}\right]=\sin\sqrt{2}t$ ⇒ 定常応答成分

第2項: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-\sqrt{2}}{s^2+2s+2}\right]=-\sqrt{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+1^2}\right]=-\sqrt{2}\,e^{-t}\sin t$

⇒ 過渡応答成分

次に、異なるアプローチをしてみよう

$V(s)$ の因数を和に分解せず、積の形に分離してみよう

$$V(s) = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)(s^2+2s+2)} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \cdot \frac{2s}{s^2+2s+2}$$

出力の
ラプラス変換

入力信号(ω)の
ラプラス変換

入力に依存しない
回路固有s 関数

すなわち、逆ラプラス変換しない周波数領域で、
回路の入出力の関係を s 関数の積で記述できる。

伝達関数

参考；先ほどの和の形と比較すると

$$V(s) = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)(s^2+2s+2)} = \frac{K_1}{s^2+\omega^2} + \frac{K_2}{s^2+2s+2}$$

入力信号パラメータ
ωを含む 過渡応答

時間領域入力

微分方程式による解
（時間領域解析）

時間領域応答

$e(t) = \sin\omega t$

$v(t)$

$$\frac{d^2v}{d^2t} + 2\frac{dv}{dt} + 2v = 2\omega\cos\omega t$$

ラプラス変換

ラプラス逆変換

$$E(s)\cdot H(s) = V(s)$$

$E(s)$

$V(s)$

伝達関数による解
（周波数領域解析）

周波数領域入力

周波数領域応答

周波数領域入力$E(s)$と回路の伝達関数 $H(s)$を掛けて
周波数領域出力 $V(s)$ が求まる
⇒ 周波数領域だけで回路応答を理解できる

ラプラス変換のまとめ

時間領域応答

微分方程式

$$v(t) = r(t) + s(t)$$

過渡応答　　定常応答

2つの時間波形の和

関係が複雑

回路　　入力

ラプラス変換

時間 ⟷ 周波数

関係がシンプル

周波数領域応答

微分方程式は不要

$$V(s) = H(s) \cdot E(s)$$

出力(s)　　伝達関数　　入力(s)

2つの周波数関数の積

ラプラス変換の諸法則

線形則 $L\left[af(t)+bg(t)\right]=aF(s)+bG(s)$ を証明せよ

証明

$$L\left[af(t)+bg(t)\right]=\int_0^\infty e^{-st}\left(af(t)+bg(t)\right)dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-st}af(t)dt+\int_0^\infty e^{-st}bg(t)dt$$

$$=aF(s)+bG(s)$$

相似則 $L\left[f(t)\right]=F(s)$ のとき $L\left[f(at)\right]=a^{-1}F\left(\frac{s}{a}\right)$ を証明せよ

証明 $at=\tau$ とすると

$$L\left[f(at)\right]=\int_0^\infty e^{-st}f(at)dt=\frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}\tau}f(\tau)d\tau$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-s'\tau}f(\tau)d\tau=\frac{1}{a}F(s')=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

合成積 $h(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$

ならば

$$H(s)=F(s)G(s)$$

$\because F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$

$\because G(s)=\int_0^\infty g(t)e^{-st}dt$

$$L\left[h(t)\right]=H(s)=\int_0^\infty\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\}e^{-st}dt$$

$$=\int_0^\infty\left\{\int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\}e^{-st}dt$$

⬅ $t-\tau<0$ $(t<\tau)$ で $g(t-\tau)=0$

$$=\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\left\{\int_0^\infty g(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}dt\right\}d\tau$$

$$=\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\int_{-\tau}^\infty g(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}d(t-\tau)d\tau$$

$x=t-\tau$

$$=\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\int_{-\tau}^\infty g(x)e^{-sx}dxd\tau$$

⬅ $-\tau\le x<0$ で $g(x)=0$ なので

$$=\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau\int_0^\infty g(x)e^{-sx}dx=F(s)G(s)$$

$f(t)$ の変数変位　　$L\left[f(t-\lambda)\right]=e^{-s\lambda}F(s)$

$$L\left[f(t-\lambda)\right]=\int_0^\infty f(t-\lambda)e^{-st}dt=\int_\lambda^\infty f(t-\lambda)e^{-st}dt$$

$$=\int_0^\infty f(\tau)e^{-s(\tau+\lambda)}d\tau \longleftarrow t-\lambda=\tau$$

変数変換
時刻の巻き戻し

$$=e^{-s\lambda}\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau=e^{-s\lambda}F(s)$$

$F(s)$ の微分　　$\frac{d}{ds}F(s)=L\left[-tf(t)\right]$

逆から証明

$$\int_0^\infty te^{-st}f(t)dt=\int_0^\infty \frac{d}{ds}\left(-e^{-st}\right)f(t)dt$$

$$=-\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=-\frac{d}{ds}F(s)$$

$F(s)$ の積分

$$L\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]=\frac{1}{s}F(s)$$

三角関数、指数関数のラプラス変換

$$L[\cos\omega t]=\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$L[\sin\omega t]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$L\left[e^{-at}\right]=\frac{1}{s+a}$$

$$L\left[e^{-at}\sin\omega t\right]=\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$

$$L\left[e^{-at}\cos\omega t\right]=\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$$

次回の授業は５月６日（振替休日）
になります。
しっかり復習しておいてください。